

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СЛОЯ С НАЧАЛЬНЫМИ (ОСТАТОЧНЫМИ) НАПРЯЖЕНИЯМИ

В статье в рамках линеаризованной теории упругости рассмотрена смешанная задача о давлении упругого цилиндрического штампа на слой с начальными (остаточными) напряжениями. Исследования выполнены в общем виде для теорий больших начальных деформаций и различных вариантов теорий малых начальных деформаций при произвольной структуре упругого потенциала.

The article deals with the mixed type task of measuring pressure of an elastic cylinder die upon a layer with initial (residual) stresses within the framework of linear elasticity theory. In general, the research was carried out for the theory of great initial deformations and different variants of the theory of small initial deformations with arbitrary structure of elastic potential.

Ключевые слова: контактная задача, теория упругости, начальные напряжения.

Современный анализ подходов к построению теорий и основных результатов применительно к трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел и трехмерной линеаризованной теории распространения упругих волн в телах с начальными (остаточными) напряжениями изложен соответственно в обобщающих публикациях [1, 2]. С применением подходов типа [1, 2] современный анализ результатов выполнен для ряда проблем линеаризованной механики деформируемых тел: для задач контактного взаимодействия упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями [3, 4]; для теории устойчивости локального состояния равновесия черных пород возле черных выработок [5]; для точных решений плоских смешанных задач линеаризованной механики деформируемых тел [6]; для неразрушающих ультразвуковых методов определения напряжений в твердых телах [7]. Существует также ряд других обобщающих публикаций по линеаризованной механике деформируемых тел; выше лишь отмечены обобщающие публикации, полностью или частично связанные с тематикой настоящей статьи, которая посвящена исследованию контактного взаимодействия упругих штампов и упругих тел, когда в них действуют также и начальные (остаточные) напряжения. В настоящее время уже исследован ряд классов задач для кусочно-однородных упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями: действуют границы раздела различных упругих тел [8 – 12], в которых расположены микротрещины; движение микротрещины в границе раздела различных упругих тел [13 – 16]; устойчивость слоистых композитных материалов, в границах раздела которых расположены трещины [17 – 18].

В статье в рамках линеаризованной теории упругости приводится решение смешанной задачи о давлении упругого цилиндрического штампа на слой с начальными (остаточными) напряжениями. Рассмотрим случаи, когда слой лежит на жестком основании без трения и слой скреплен с жестким основанием. Исследования выполнены в общем виде для теорий больших (конечных) начальных деформаций и различных вариантов теорий малых начальных деформаций при произвольной структуре упругого потенциала. Предполагается, что упругие потенциалы – дважды непрерывно дифференцируемые функции алгебраических инвариантов тензора деформации Грина и начальное состояние в слое является однородным. Все исследования проведены в координатах начального деформированного состояния y_i , которые связаны с лагранжевыми координатами (естественного состояния) отношениями $y_i = \lambda_i x_i$ ($i = 1, 2, 3$), где λ_i – коэффициенты удлинения, что определяют перемещения начального состояния.

Кроме того, предположим, что действие штампа вызывает в слое малое возмущение основного напряженно-деформированного состояния, для которого выполняются условия

$$S_0^{11} = S_0^{22} \neq 0; \quad S_0^{33} = 0; \quad \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3.$$

Величины, относящиеся к упругому штампу, записываем в принятых обозначениях теории упругости, а величины, относящиеся к предварительно напряженному слою, – с начальными (остаточными) напряжениями в обозначениях [1, 2].

Пусть в упругий слой с начальными напряжениями (которые возникают до контакта) вдавливается упругий цилиндрический штамп высотой H под действием силы P (рис. 1). Сила приложена к упругому штампу так, что его свободный торец деформируется в направлении оси Oy_3 на одинаковую величину ε , а поверхности вне области контакта остаются свободными от напряжений. В системе круговых цилиндрических координат (r, θ, z_i) такой постановке соответствуют граничные условия.

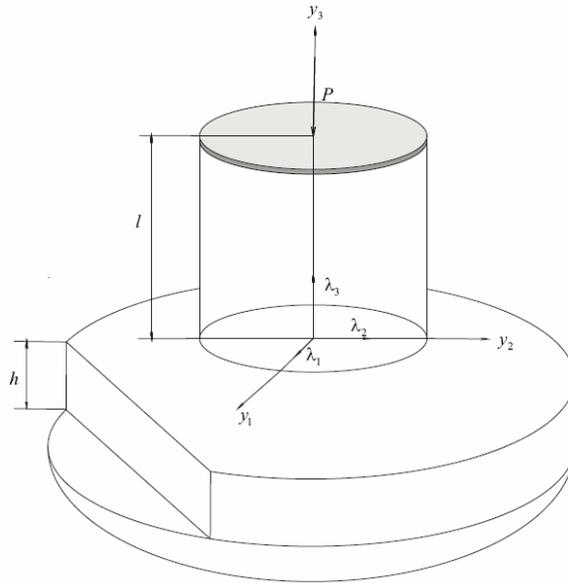


Рис. 1. Цилиндрический штамп и слой с начальными (остаточными) напряжениями

На торце упругого штампа $z_i = n_i^{-1/2} H$

$$u_z = -\varepsilon; \quad \tau_{rz} = 0 \quad (0 \leq r \leq R). \quad (1)$$

На границе упругого слоя в области контакта $z_i = 0$

$$u_3 = u_z; \quad \tilde{Q}_{33} = \sigma_{zz} \quad \tilde{Q}_{3r} = \tau_{rz} = 0 \quad (0 \leq r \leq R). \quad (2)$$

На границе упругого слоя вне области контакта $z_i = 0$

$$\tilde{Q}_{33} = 0 \quad \tilde{Q}_{3r} = 0 \quad (R \leq r < \infty). \quad (3)$$

На боковой поверхности упругого штампа $r = R$

$$\sigma_{rr} = 0; \quad \tau_{rz} = 0 \quad (0 \leq z_i \leq H). \quad (4)$$

На нижней поверхности слоя, лежащего на жестком основании и скрепленного с основанием,

$$z_i = -\frac{\lambda_3 H_2}{\sqrt{n_i}} = -\frac{H_i}{\sqrt{n_i}},$$

$$u_3 = 0 \quad \tilde{Q}_{3r} = 0 \quad (0 \leq r < \infty), \quad (5)$$

$$u_3 = 0 \quad u_r = 0 \quad (0 \leq r < \infty), \quad (6)$$

где $z_i = n_i^{-1/2} y_3$; H_2 – толщина слоя в естественном (недеформированном) состоянии; H_1 – толщина слоя в начальном деформированном состоянии; R – радиус штампа; n_i – корни разрешающего уравнения.

Напряженно-деформированное состояние в упругом слое с начальными напряжениями определим через гармонические функции в виде интегралов Ханкеля. Скажем, что преобразования Ханкеля хоть и не дают возможности получить точные решения, но позволят свести задачу к интегральным уравнениям типа Фредгольма, что позволят эффективнее использовать метод последовательных приближений для $\lambda_1 > \lambda_{kr}$. Удовлетворив третьему условию (2), второму – (3) и условиям (5), (6), после ряда преобразований имеем

$$u_3 = \frac{1}{\omega_1} \int_0^\infty \eta^{-1} F(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta - \frac{1}{\omega_1} \int_0^\infty \eta^{-1} F(\eta) G(\eta h) J_0(\eta \rho) d\eta;$$

$$\tilde{Q}_{33} = \frac{2\omega_2}{R} \int_0^\infty F(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta; \quad \tilde{Q}_{3r} = 0, \quad (7)$$

где

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{n_i}}{m_i} \begin{cases} (s_1 - s_0)^{-1} & n_1 = n_2; \\ (s_2 - s_3)^{-1} & n_1 \neq n_2; \end{cases} \quad \omega_2 = \begin{cases} c_{44}(1+m_1)l_1(s-s_0) & n_1 = n_2; \\ c_{44}(1+m_1)l_1(s-s_3) & n_1 \neq n_2; \end{cases}$$

$$s_0 = \frac{1+m_2}{1+m_1}; \quad s_1 = \frac{m_1-1}{m_1}; \quad s_2 = \frac{m_2}{m_1} \sqrt{\frac{n_1}{n_2}}; \quad s_3 = s_0 \sqrt{\frac{n_1}{n_2}}; \quad s = s_0 \frac{l_2}{l_1};$$

$$G(\eta h) = 1 - q_i^{-1}(\eta h); \quad h = H_1 / R; \quad \varphi_i = 2\eta \frac{h}{\sqrt{n_i}};$$

$$q_i = \begin{cases} (sh2\varphi_1 + 2\varphi_1/s - s_0)(ch2\varphi_1 - 1)^{-1}, & n_1 = n_2; \\ s(cth\varphi_2 - s_3cth\varphi_2), & n_1 \neq n_2; \\ \frac{(1-s)(s_0 - s_1) + (1-s_1)(s_0 - s)sh^2\varphi_1 + \varphi_1^2}{\varphi_1 - (1-s_1)sh\varphi_1ch\varphi_1}, & n_1 = n_2; \\ \frac{(s_2 + ss_3) - (s + s_2s_3)sh\varphi_2ch\varphi_1 + (s_3 + ss_2)ch\varphi_2sh\varphi_1}{(s_2sh\varphi_1sh\varphi_2 - ch\varphi_1ch\varphi_2)}, & n_1 \neq n_2. \end{cases} \quad (8)$$

В (8) q_1 та q_2 соответствуют (5), а q_3 и q_4 – (6).

Выражения (7) получены в общей форме для сжимаемых и несжимаемых тел, куда входят коэффициенты n_i , m_i , c_{44} , l_i . Значения этих коэффициентов для сжимаемых и несжимаемых тел поданы в [2].

Для определения напряженно-деформированного состояния в упругом цилиндре используем уравнение Ламе, решение которого берем в виде гармонических функций Папковича – Нейбера. Удовлетворив граничным условиям (1) – (7) представим компоненты тензора напряжений и вектора перемещений в любой точке упругого штампа через неизвестные постоянные χ_i ($i = 0, 1, 2, \dots$) в виде

$$u_r = -\varepsilon \left\{ \frac{\sigma}{l} \chi_0 + \frac{\omega_1}{1-2\sigma} \sum_{k=1}^{\infty} (\chi_k J_0(\mu_k \rho) F_{k0}^{(0)} [1-2\sigma; 1] + S_k G_k [2(1-\sigma); 0] \cos \tau_k \xi) \right\};$$

$$u_z = -\varepsilon \left\{ 1 + \left(\frac{\xi}{\rho} - 1 \right) \chi_0 + \frac{\omega_1}{1-2\sigma} \sum_{k=1}^{\infty} (\chi_k J_0(\mu_k \rho) F_{k1}^{(1)} [2(\sigma-1); 2] - S_k G_k [2(1-\sigma); 1] \sin \tau_k \xi) \right\};$$

$$\sigma_z = -\frac{\varepsilon G}{lR} \left\{ \chi_0 + \frac{\omega_1 l}{(1-2\sigma)(1+\sigma)} \sum_{k=1}^{\infty} (\chi_k \mu_k J_0(\mu_k \rho) F_{k0}^{(1)} [1; 1] - \tau_k S_k G_k [2; -1] \cos \tau_k \xi) \right\}; \quad (9)$$

$$\tau_{rz} = \frac{\varepsilon E}{lR} \left\{ \frac{\omega_1}{(1-2\sigma)(1+\sigma)} \sum_{k=1}^{\infty} (\chi_k \mu_k J_1(\mu_k \rho) F_{k1}^{(1)} [1; 1] + \tau_k S_k G_k [0; 0] \sin \tau_k \xi) \right\};$$

$$\sigma_r = -\frac{\varepsilon}{R} \left\{ \frac{\omega_1}{(1-2\sigma)(1+\sigma)} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\chi_k \mu_k J_0(\mu_k \rho) F_{k0}^{(0)} [1; 1] + \frac{1}{\rho} J_1(\mu_k \rho) F_{k0}^{(1)} [(2\sigma-1); 1] + \right. \right.$$

$$\left. \left. + S_k \left[(\tau_k G_k [-1; 1] - \frac{1}{\rho} G_k [2(1-\sigma); 0] + \frac{4\tau_k}{l} I_0(\tau_k \rho) I_1(\tau_k) \right] \cos \tau_k \xi \right) \right\}.$$

Здесь

$$F_{km}^{(v)}[\chi; n] = \frac{\chi a_n sh \mu_k l - (-1)^n \mu_k (l a_n + (-1)^n a_{n+1} \xi sh \mu_k l)}{sh^2 \mu_k l};$$

$$G_k[\chi; v] = \frac{4}{l} [\chi J_{v+1}(\tau_k \rho) I_1(\tau_k) + \tau_k (\rho I_{-v}(\tau_k \rho) I_1(\tau_k) - I_{v+1}(\tau_k \rho) I_0(\tau_k))];$$

$$S_k = \frac{\tau_k}{\omega_k} \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n t_{kn}; \quad t_{kn} = \frac{J_0(\mu_k)}{(\tau_k^2 + \mu_n^2)^2};$$

$$\tilde{\omega}_k = -\frac{2(1-\sigma)}{\tau_k} I_1^2(\tau_k) + \tau_k (I_0^2(\tau_k) - I_1^2(\tau_k)),$$

где $J_v(x)$, $I_v(x)$ – функции Бесселя действительного и мнимого аргумента;

$$a_1 = a_3 = ch\mu_k(l - \xi); \quad a_2 = sh\mu_k(l - \xi); \quad \xi = \frac{z_i}{R}; \quad l = \frac{H_1}{R}.$$

Метод решения. Используя решение для цилиндра (9) и удовлетворяя четвертому условию (2), первому условию (4), находим собственные значения задачи (1) – (6), которые являются корнями уравнений

$$\sin \tau_k H_1 = 0; \quad J_1(\mu_k) = 0. \quad (10)$$

Остальные условия приводят к рекуррентным отношениям между произвольными постоянными и неизвестными χ_i ($i = 0, 1, 2, \dots$), а с помощью первых условий (2) и (3) можно определить неизвестную функцию $F(\eta)$ из парных интегральных уравнений

$$\int_0^\infty \eta^{-1} F(\eta) J_0(\mu_k \rho) d\eta = f(\rho) \quad (\rho < 1), \quad \int_0^\infty F(\eta) J_0(\mu_k \rho) d\eta = 0 \quad (\rho > 1), \quad (11)$$

где

$$f(\rho) = -\varepsilon\omega_1 \left(1 - \chi_0 - \frac{1 - 2\sigma}{2(1 - \sigma)} \sum_{k=1}^\infty \chi_k J_0(\mu_k \rho) \right) + \int_0^\infty \frac{F(\eta) G(\eta h) J_1(\eta \rho)}{\eta} d\eta.$$

Применение формулы обращения к (11) приводит к интегральному уравнению Фредгольма второго рода относительно функции $F(\eta)$

$$\frac{F(\eta)}{\eta} = -\frac{2\varepsilon\omega_1}{\pi} (1 - \chi_0) \psi_0(\eta, 0) + \frac{\varepsilon\omega_1(1 - 2\sigma)}{\pi(1 - \sigma)} \sum_{k=1}^\infty \chi_k \psi_0(\eta, \mu_k) + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{F(u) G(uh) \psi_0(\eta, u)}{u} du, \quad (12)$$

где

$$\psi_n(x, y) = \int_0^1 t^n \cos xt \cos ytdt \quad \left(\psi_0(x, 0) = \frac{\sin x}{x} = \beta_1(x) \right).$$

Решение (12) будем искать методом последовательных приближений, взяв за нулевое приближение функцию

$$\frac{F^{(0)}(\eta)}{\eta} = -\frac{2\varepsilon\omega_1}{\pi} \psi_0(\eta, 0) + \frac{\varepsilon\omega_1(1 - 2\sigma)}{\pi(1 - \sigma)} \sum_{k=1}^\infty \psi_0(\eta, \mu_k) \chi_k.$$

Последующие приближения определим по формуле

$$\frac{F^{(k)}(\eta)}{\eta} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty F^{(k-1)}(u) G(uh) \psi_0(\eta, u) du.$$

И решение (12) запишем в виде

$$F(\eta) = \sum_{k=0}^\infty F^{(k)}(\eta). \quad (13)$$

Отметим, что процесс последовательных приближений (13) сходится при $h > 1$, но ввиду громоздкости доказательство здесь не приводится.

Удовлетворив первым двум граничным условиям (2) с учетом ортогональности бесселевых функций $J_0(\mu_k \rho)$ и значений интеграла

$$\int_0^{\infty} \eta \psi_n(\eta, \mu_k) d\eta \int_0^1 \rho J_0(\eta \rho) J_0(\mu_k \rho) d\rho = \psi_n(\mu_n, \mu_k),$$

для определения постоянных χ_i ($i = 0, 1, 2, \dots$), которые входят в (9) и (13), получим бесконечную систему алгебраических уравнений

$$\alpha_k \chi_k + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{kn} \chi_n = d_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (14)$$

При вычислении функций (13) и коэффициентов системы (14) большинство интегралов в конечном виде не вычисляются ввиду сложности функций q_i ($i = \overline{1, 4}$). Поэтому, начиная со второго приближения, подынтегральные функции раскладываем в ряды по степеням $\frac{1}{h}$. Так, для слоя, лежащего на жестком основании без трения (5), в случае равных корней [4] аппроксимируем функцию $q_1^{-1}(x)$ выражением

$$q_1^{-1}(x) \cong 1 - \frac{1}{\tilde{\chi}_1 + 1} \frac{x}{shx} - \frac{0,14}{\tilde{\chi}_1(\tilde{\chi}_1 + 1)} \frac{x}{chx}.$$

Коэффициенты системы можно представить в виде

$$\begin{aligned} \alpha_0 = d_0 &= \frac{2}{\pi} \left[1 + \frac{c_0}{\pi} \frac{1}{h} + \frac{c_0^2}{\pi^2} \frac{1}{h^2} - \frac{c_2}{12\pi} \frac{1}{h^3} - \frac{c_0 c_2}{6\pi^2} \frac{1}{h^4} + \frac{c_4}{360\pi} \frac{1}{h^5} + \frac{9c_0 c_4 + 2c_2^2}{1920\pi^2} \frac{1}{h^6} + \dots \right]; \\ \alpha_{k0} = d_k &= \frac{2}{\pi} \left[\beta_1(\mu_k) \left(1 + \frac{c_0}{\pi} \frac{1}{h} + \frac{c_0^2}{\pi^2} \frac{1}{h^2} \right) - \left(\beta_1(\mu_k) + 3\beta_2(\mu_k) \right) \frac{c_2}{24\pi} \frac{1}{h^3} - \right. \\ &\quad \left. - \left(\beta_1(\mu_k) + \beta_2(\mu_k) \right) \frac{c_0 c_2}{8\pi^2} \frac{1}{h^4} + \left(\beta_1(\mu_k) + 10\beta_2(\mu_k) + 5\beta_4(\mu_k) \right) \frac{c_4}{1920\pi} \frac{1}{h^5} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\left(\frac{19}{15} \beta_1(\mu_k) + 2\beta_2(\mu_k) + \beta_4(\mu_k) \right) \frac{c_0 c_4}{384\pi^2} + \left(\frac{14}{15} \beta_1(\mu_k) + 2\beta_2(\mu_k) \right) \frac{c_2^2}{192\pi^2} \right) \frac{1}{h^6} + \dots \right]; \\ \alpha_{kn} &= \frac{1}{\pi} \frac{\omega_1(1-2\sigma)}{(1-\sigma)} \left[\psi_0(\mu_n, \mu_k) + \beta_1(\mu_k) \beta_1(\mu_n) \left(\frac{c_0}{\pi} \frac{1}{h} + \frac{c_0^2}{\pi^2} \frac{1}{h^2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left(\beta_1(\mu_n) \beta_2(\mu_k) + \beta_2(\mu_n) \beta_1(\mu_k) \right) \frac{c_4}{8\pi^2} \frac{1}{h^3} - \right. \\ &\quad \left. - \left(2\beta_1(\mu_k) \beta_1(\mu_n) + 3(\beta_1(\mu_k) \beta_2(\mu_n) + \beta_2(\mu_k) \beta_1(\mu_n)) \right) \frac{c_0 c_2}{24\pi^2} \frac{1}{h^4} + \right. \\ &\quad \left. \left\{ \frac{1}{6} (\beta_1(\mu_n) \beta_4(\mu_k) + \beta_1(\mu_k) \beta_4(\mu_n) + \beta_2(\mu_k) \beta_2(\mu_n)) \right\} \frac{c_4}{64\pi} \frac{1}{h^5} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\left(\beta_1(\mu_n) \beta_4(\mu_k) + \beta_1(\mu_k) \beta_4(\mu_n) + 2(\beta_1(\mu_n) \beta_2(\mu_k) + \beta_1(\mu_k) \beta_2(\mu_n)) + \frac{2}{5} \beta_1(\mu_n) \beta_1(\mu_k) \right) \frac{c_0 c_4}{384\pi^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (3\beta_1(\mu_n) \beta_2(\mu_k) + \beta_1(\mu_k) \beta_2(\mu_n)) \frac{c_2^2}{192\pi^2} \right) \frac{1}{h^6} + \dots \right] - \frac{2E}{\omega_1 \omega_2 (1-\sigma^2)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tau_m^3 I_1^2(\tau_m) t_{km} t_{mn}}{\omega_m}; \\ \alpha_k &= \frac{E \mu_k J_0^2(\mu_k)}{8\omega_2 (1+\sigma)(1-2\sigma)} \cdot \frac{2\mu_k l + sh 2\mu_k l}{sh^2 \mu_k l}, \quad \alpha_{00} = \frac{E}{4l\omega_2 \omega_1}, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} \psi_n(\mu_k, 0) &= \beta_n(\mu_k) \quad (n = 2, 4), \\ c_n &= \int_0^{\infty} t^n G(t) dt, \quad \tilde{\chi}_1 = s - s_0. \end{aligned}$$

Используя условие равновесия, установим связь между осадкой и равнодействующей нагрузкой P

$$P = -2\pi R^2 \int_0^1 \rho \sigma_{zz}(0, \rho) d\rho. \quad (16)$$

Подставив (9) в (16), после интегрирования и ряда преобразований получим

$$P = \frac{\pi \varepsilon \chi_0 R}{l} E.$$

Определив неизвестные постоянные χ_i ($i = 0, 1, 2, \dots$) из системы (14), можно вычислить перемещения и напряжения как в упругом штампе, так и слое по формулам (7), (9) и (13).

В результате этого решение представлено в виде рядов через бесконечную систему констант, которые определяются из системы регулярных линейных алгебраических уравнений. Причем в системе (14) коэффициенты α_k и α_{kn} зависят от величин ω_1 , ω_2 , определяющих структуру упругого потенциала, высоты упругого штампа H и толщины предварительно напряженного слоя, а свободные члены зависят только от корней характеристических уравнений (10).

На основании анализа аналитического решения и численных подсчетов можно сделать следующие выводы.

Начальные напряжения в слое значительно влияют на закон распределения контактных напряжений и перемещений в слое и цилиндре. Это влияние отмечено в цилиндре для сечений $\xi < 1$ и в области контакта штампа и слоя.

Начальные напряжения существенным образом влияют на характер распределения u_3 , \tilde{Q}_{33} и зависят от величины δ .

Таким образом, в данной работе получены аналитические и графические зависимости, отражающие влияние начальных напряжений на напряженно-деформированное состояние системы “упругий цилиндр с начальными (остаточными) напряжениями – слой с начальными (остаточными) напряжениями”. Это влияние существенно как для сжимаемых, так и несжимаемых тел и должно учитываться при расчетах на прочность деталей машин и конструкций.

Список использованных источников

1. Guz A.N. Constructing the three-dimensional theory of stability of deformable bodies / A.N. Guz // Int. Appl. Mech. – 2001. – 37, № 1. – P. 1 – 37.
2. Guz A.N. Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses / A.N. Guz // Int. Appl. Mech. – 2002. – 38, № 1. – P. 23 – 59.
3. Babich S.Yu. Contact problems for elastic bodies with initial stresses: Focus on Ukrainian research / Babich S.Yu., Guz A.N., Rudnitsky V.B. // Appl. Mech. Reviews. – 1998. – 51, № 5. – P. 343 – 371.
4. Babich S.Yu. Contact problems for prestressed elastic bodies and rigid and elastic punches / Babich S.Yu., Guz A.N., Rudnitsky V.B. // Int. Appl. Mech. – 2004. – 40, № 7. – P. 744 – 765.
5. Guz A.N. Establishing the fundamentals of the theory of stability of mine workings / A.N. Guz // Int. Appl. Mech. – 2003. – 39, № 1. – P. 20 – 48.
6. Guz A.N. Mixed plane problems in linearized solid mechanics. Exact solutions / Guz A.N., Guz I.A. // Int. Appl. Mech. – 2004. – 40, № 1. – P. 1 – 29.
7. Guz A.N. The physical fundamentals of the ultrasonic nondestructive stress analysis of solids / Guz A.N., Makhort F.G. // Int. Appl. Mech. – 2000. – 36, № 9. – P. 1119 – 1149.
8. Guz A.N. Analytical solution of stability problem for two composite half-planes compressed along interfacial cracks / Guz A.N., Guz I.A. // Composites. Part B. – 2000. – 31, № 5. – P. 405 – 418.
9. Guz A.N. The stability of the interface between two bodies compressed along cracks. 1. Exact solutions for the case of unequal roots / Guz A.N., Guz I.A. // Int. Appl. Mech. – 2000. – 36, № 4. – P. 482 – 491.
10. Guz A.N. The stability of the interface between two bodies compressed along interface cracks. 2. Exact solutions for the case of equal roots / Guz A.N., Guz I.A. // Int. Appl. Mech. – 2000. – 36, № 5. – P. 615 – 622.
11. Guz F.N. The stability of the interface between two bodies compressed along interface cracks. 3. Exact solutions for the combined case of equal and unequal roots / Guz F.N., Guz I.A. // Int. Appl. Mech. – 2000. – 36, № 6. – P. 759 – 768.
12. Guz A.N. The stability of two different half-planes on compression along interfacial cracks: Analytical solutions / Guz A.N., Guz I.A. // Int. Appl. Mech. – 2001. – 37, № 7. – P. 906 – 912.
13. Guz A.N. Critical phenomena in cracking of the interface between two prestressed materials. 1. Problem formulation and basic relations / A.N. Guz // Int. Appl. Mech. – 2002. – 38, № 4. – P. 423 – 431.
14. Guz A.N. Critical phenomena in cracking of the interface between two prestressed materials. 2. Exact solution. The case of unequal roots / A.N. Guz // Int. Appl. Mech. – 2002. – 38, № 5. – P. 548 – 555.

15. Guz A.N. Critical phenomena in cracking of the interface between two prestressed materials. 3. Exact solution. The case of unequal roots / A.N. Guz // *Int. Appl. Mech.* – 2002. – 38, № 6. – P. 693 – 700.
16. Guz A.N. Critical phenomena in cracking of the interface between two prestressed materials. 4. Exact solution. The case of unequal and equal roots / A.N. Guz // *Int. Appl. Mech.* – 2002. – 38. – P. 806 – 814.
17. Guz I.A. Stability of the composite under compression along the crack situated of the boundary between layers / I.A. Guz // *Doklady Akademii Nauk SSSR.* – 1992. – 325, № 3. – P. 455 – 458.
18. Guz I.A. Stability of the composite under compression along 2 microcracks situated on the interlayers boundary / I.A. Guz // *Doklady Akademii Nauk SSSR.* – 1993. – 328, № 4. – P. 437 – 439.